

Resolución de un modelo electromagnético axisimétrico de elementos finitos con circuito acoplado usando MATLAB.

Ing. Victor Hugo Hernández Hernández, Dr. Juan Mauricio Díaz Chacón, Dr. Pedro Francisco Rosales Escobedo, M.C. Rubén Andrés Reyes Zamora.

^a Universidad Autónoma de Baja California C.P 21100, victor.hugo.hernandez.hernandez@uabc.edu.mx, Mexicali, Baja California México.

^b Universidad Autónoma de Baja California C.P 21100, juan.mauricio.diaz.chacon@uabc.edu.mx, Mexicali, Baja California México.

^c Universidad Autónoma de Baja California C.P 21100, prosales@uabc.edu.mx, Mexicali, Baja California México.

^d Universidad Autónoma de Baja California C.P 21100, ruben.andres.reyes.zamora@uabc.edu.mx, Mexicali, Baja California México.

Resumen

En la era moderna, el uso de aplicaciones tecnológicas para el diseño de diversos dispositivos electromagnéticos tales como el Método de Elementos Finitos, se ha convertido en una tendencia primordial para el desarrollo de productos de calidad en la industria eléctrica. En este artículo se presenta la resolución y validación de un modelo axisimétrico acoplado a un circuito eléctrico externo utilizando la formulación electromagnética del Método de Elementos Finitos. En este trabajo se aplica la formulación transitoria para conductores “delgados”, alimentados por una fuente de voltaje. La principal contribución en este artículo es la implementación de esta formulación electromagnética usando el software MATLAB, el cual permite al usuario, una codificación sencilla, eficiente y confiable, en términos de recursos de cómputo. El código implementado fue desarrollado con el objetivo de ser adaptable en la resolución de diversos modelos multifísicos, de otras áreas. Como etapa de validación se presenta la simulación de un dispositivo electromagnético que posee una solución analítica. La versatilidad del código desarrollado fomenta un entorno de colaboración y educación continua dentro de la comunidad científica y de los estudiantes de posgrado, propiciando el intercambio de conocimientos y técnicas innovadoras de simulación de estos modelos en los diversos campos de la ciencia.

Palabras clave—Circuito Eléctrico, Electromagnetismo, Método de Elementos Finitos, MATLAB, Cómputo Científico.

Abstract

In the modern era, the use of technological applications for the design of various electromagnetic devices such as the Finite Element Method has become a primary trend for the development of quality products in the electrical industry. This article presents the resolution and validation of an axisymmetric model coupled to an external electrical circuit using the electromagnetic formulation of the Finite Element Method. In this work, the transient formulation for "thin" conductors, powered by a voltage source is applied. The main contribution of this article is the implementation of this

formulation in the MATLAB software, which allows for simple, efficient, and reliable coding, in terms of computing resources. The implemented code was developed with the objective to be adapted to solve several multi-physical models in other areas. As a validation stage, the simulation of an electromagnetic device that has an analytical solution is presented. The versatility of the developed code promotes a collaborative and continuous education environment within the scientific community and graduate students, fostering the exchange of knowledge and innovative simulation techniques of these models in the various fields of science.

Keywords— Electric Circuit, Electromagnetism, Finite Element Method, MATLAB, Scientific Computing.

1. INTRODUCCIÓN

En el área eléctrica, el Método de Elementos Finitos (MEF) es una técnica de cómputo científico, basada en las ecuaciones de Maxwell, que se utiliza comúnmente para la simulación de campos eléctricos y magnéticos en configuraciones complejas mediante la discretización de la región de interés en elementos pequeños [1]-[3]. Este trabajo se enfoca en la resolución del modelo electromagnético transitorio en dos dimensiones de geometría axisimétrica con un circuito acoplado. Estos modelos cuentan con un circuito eléctrico externo que puede estar conformado por elementos resistivos, capacitivos e inductivos, los cuales no se pueden considerar de manera natural en la formulación clásica del MEF [4]-[5]. La contribución de este trabajo radica en la capacidad del modelo implementado para optimizar significativamente los recursos computacionales utilizados al momento de resolver modelos de esta clase. En un contexto donde el ahorro de recursos computacionales y la eficiencia del tiempo de resolución son críticos, se propuso una solución eficiente en términos de cálculo y gestión del rendimiento de cómputo. La formulación presentada en este artículo se deriva y se valida empleando un modelo de la referencia [1]. Dicho modelo fue implementado en el software MATLAB [7], debido a las facilidades que ofrecen sus diversas herramientas de cómputo. Esto es con el fin de garantizar una resolución rápida y eficiente.

2. FORMULACIÓN DE ELEMENTO FINITO

2.1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell se emplean para el modelado numérico y simulación de dispositivos electromagnéticos de características y geometrías complejas, los cuales son difíciles de resolver por métodos analíticos. Estas ecuaciones se transforman en un conjunto de ecuaciones algebraicas mediante la discretización del dominio en elementos finitos.

Las ecuaciones de Maxwell cuasi-estáticas y las relaciones constitutivas que se utilizan en el MEF son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\nu} \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5)$$

donde:

\mathbf{H} es la intensidad del campo magnético $\left(\frac{A}{m}\right)$.

\mathbf{B} es la densidad de flujo magnético (T) .

\mathbf{E} es el campo eléctrico $\left(\frac{V}{m}\right)$.

\mathbf{J} es la densidad de corriente eléctrica $\left(\frac{A}{m^2}\right)$.

ν es la reluctancia magnética (I/H) .

σ es la conductividad eléctrica (S/m) .

2.2 Desarrollo del MEF para el Análisis de Campos Magnéticos Estáticos

Despejando el término de \mathbf{H} de la ecuación (5) y sustituyéndolo en la ecuación (1) se obtiene:

$$\nabla \times \nu \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (6)$$

Al aplicar la identidad vectorial nula $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ en la ecuación (2) se obtiene el potencial magnético vectorial \mathbf{A} . El cual es determinado por:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{J} cuenta solamente con una componente en el eje “z”, en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A \hat{k} \\ \mathbf{J} &= J \hat{k} \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (7) con respecto a la ecuación (6), se obtiene como resultado:

$$\nabla \times \nu (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad (8)$$

Se define la identidad vectorial dada por:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (9)$$

Aplicando la identidad vectorial en la ecuación (9), se obtiene:

$$\nu [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] = \mathbf{J} \quad (10)$$

Debido a que el potencial vectorial tiene una divergencia igual a cero, derivado de la aplicación de la norma de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), la ecuación (10) se reduce a:

$$-\nu \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (11)$$

Dado a que el potencial magnético vectorial y la densidad de corriente eléctrica, se encuentran en un plano bidimensional. Solamente cuentan con componente, y se representa:

$$-\nu \nabla^2 A = J \quad (12)$$

donde:

A es la magnitud de la componente azimutal del potencial magnético vectorial.

Aplicando la identidad vectorial (13) en la ecuación (12) se obtiene como resultado la ecuación (14):

$$\nabla \cdot \nabla A = \nabla^2 A \quad (13)$$

$$-\nabla \cdot (\nu \nabla A) = J \quad (14)$$

Aplicando el método de residuos ponderados de Galerkin en la ecuación (14) para determinar una solución aproximada, se produce un residual X , dado por:

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A) + J = X \quad (15)$$

Sustituyendo el residual en el método de Galerkin, se obtiene como resultado:

$$\int_{\Omega} W [\nabla \cdot (\nu \nabla A) + J] d\Omega = 0 \quad (16)$$

donde:

W es la función de peso.

Aplicando el teorema de la divergencia en la ecuación (16), se obtiene como resultado una ecuación de “forma débil”, la cual debe su nombre a la reducción del orden de la ecuación diferencial y permite que la implementación del método de elementos finitos (MEF) de dicha ecuación sea más sencillo, como:

$$\int_{\Omega} [\nu (\nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_j) A_j - \beta_i J] d\Omega = 0 \quad (17)$$

2.3 Desarrollo del MEF para el Análisis de Campos Magnéticos Cuasi-Estáticos Axisimétricos

Los problemas con variación en el tiempo, se hace el uso del término de la ecuación (3), al cual se le implementa la ecuación (7) y se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \quad (18)$$

Eliminando los gradientes se obtiene:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (19)$$

Suponiendo que \mathbf{E} es generado solo por la variación de tiempo de \mathbf{B} , y sustituyéndolo en la ecuación (5) se obtiene:

$$\mathbf{J} = \left(J - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) \hat{k} \quad (20)$$

Las ecuaciones utilizadas para la resolución del modelo a resolver en este artículo están adaptadas a una geometría axisimétrica. Esto quiere decir que la solución del sistema de ecuaciones se desarrollará en un sistema de coordenadas cilíndricas.

En geometrías axisimétricas, la densidad de flujo magnético \mathbf{B} , dada por la ecuación (7), cuenta con dos componentes cilíndricas, las cuales están dadas por:

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} \quad (21)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \quad (22)$$

Cabe mencionar que tanto \mathbf{A} como \mathbf{J} cuentan con una sola componente en la dirección azimutal φ . Bajo estas condiciones, la ecuación (6) viene a ser:

$$\frac{\partial}{\partial z} (vB_r) - \frac{\partial}{\partial r} (vB_z) = J - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (21) y (22) en la ecuación (22) se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial z} v \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] = J - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (24)$$

Y finalmente, mediante un desarrollo matemático se obtiene como resultado:

$$\frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} v \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{vA}{r} \right) = -J + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (25)$$

Los primeros dos términos de la ecuación (25) son similares a los términos de la ecuación (6). Para las coordenadas cartesianas, se realiza la sustitución $r = y$ y $z = x$. Sin embargo, el término $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{vA}{r} \right)$ crea una asimetría en la matriz elemental, cuando se aplica el método de Galerkin, debido a que este término depende únicamente de la coordenada r . Para eliminar este inconveniente, se introduce una nueva variable A' relacionada con A :

$$A' = rA \quad (26)$$

Y la ecuación (23) viene a ser:

$$\frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial A'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} v \frac{\partial A'}{\partial r} + J - \frac{\sigma \partial A'}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

Aplicando el método de Galerkin a la ecuación (25) se obtiene:

$$\int_S \beta^t \left(\frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial A'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} v \frac{\partial A'}{\partial r} \right) dr dz - \int_S \beta^t \frac{\sigma \partial A'}{r \partial t} dr dz + \int_S \beta^t J dr dz = 0 \quad (28)$$

Después de integrar el primer término por partes se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_S \beta^t \left(\frac{\partial}{\partial r} v \frac{\partial A'}{\partial r} \right) dr dz = \int_S \frac{\partial}{\partial r} \left(\beta^t v \frac{\partial A'}{\partial r} \right) dr dz - \int_S \frac{v \partial \beta^t \partial A'}{r \partial r} dr dz \quad (29)$$

De manera análoga, se obtiene el segundo término de la primera integración de la ecuación (26):

$$\int_S \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta^t v \frac{\partial A'}{\partial z} \right) dr dz - \int_S \frac{v \partial \beta^t \partial A'}{r \partial z} dr dz \quad (30)$$

Uniendo las ecuaciones (29) y (30) se obtiene:

$$\int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\beta^t v \frac{\partial A'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta^t v \frac{\partial A'}{\partial z} \right) \right\} dr dz - \int_S \left(\frac{v \partial \beta^t \partial A'}{r \partial r} + \frac{v \partial \beta^t \partial A'}{r \partial z} \right) dr dz \quad (31)$$

Recapitulando lo anterior:

$$H_r = -v \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{v \partial A'}{r \partial z} \quad (32)$$

$$H_z = \frac{v \partial A'}{r \partial r} \quad (33)$$

Definiendo el operador $\nabla \cdot$ en el plano “ $z - r$ ”

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial r} \quad (34)$$

Ahora, la primera integral de la ecuación (31) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\int_S \nabla \cdot (\mathbf{j} N^t H_z - \mathbf{i} N^t H_r) dr dz \quad (35)$$

Aplicando el teorema de divergencia

$$\oint_L N^t (\mathbf{j} H_z - \mathbf{i} H_r) \cdot \mathbf{n} dl \quad (36)$$

En donde:

\mathbf{n} es el vector unitario para la línea L ($\mathbf{n} = \mathbf{i} n_z + \mathbf{j} n_r$)

Esta expresión puede ser introducida en la siguiente ecuación:

$$\oint_L \beta^t (-H_r n_z + H_z n_r) dl \quad (37)$$

Si se realiza la primera integral de la ecuación (31), teniendo en cuenta las condiciones de frontera, se obtiene la condición frontera Neumann, ya que $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$. Para la condición de frontera Dirichlet, la función de forma β^t es igual a cero en la parte del límite donde se imponen los potenciales. La segunda integral en la ecuación (28) proporciona la matriz elemental. Para un elemento triangular, la relación de esta ecuación se convierte en:

$$-\int_S \left(\frac{v}{r} \frac{\partial \beta^t}{\partial r} \frac{\partial A'}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \beta^t}{\partial z} \frac{\partial A'}{\partial z} \right) dr dz - \int_S \frac{\sigma}{r} \beta^t \frac{\partial A'}{\partial t} dr dz + \int_S \beta^t J dr dz = 0 \quad (38)$$

En la ecuación (38) se observa el término $\frac{\partial A'}{\partial t}$, el cual representa una derivada con respecto al tiempo, por lo que es necesario resolver esta variación del tiempo de la siguiente manera:

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = \frac{A'(t) - A'(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (39)$$

2.4 Desarrollo del MEF para el Análisis de Campos Magnéticos Cuasi-Estáticos Axisimétricos con Circuito Acoplado

Como ecuación diferencial parcial del modelo cuasi-estático con circuito acoplado se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A'}{\partial r} \right) + \frac{N_{cok}}{S_k} I - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A'}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

donde:

- I es la corriente en el conductor.
- N_{cok} representa el número de vueltas del conductor.
- S_k representa el área de sección transversal de la bobina.

Las ecuaciones de elemento finito con circuito acoplado que se utilizaron son las implementadas para conductores "delgados". En estas ecuaciones se incluye un circuito eléctrico mediante la aplicación de la teoría de circuitos. La ecuación del circuito acoplado es:

$$V(t) = R I(t) + N_{cok} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \quad (41)$$

donde:

- ϕ es el flujo magnético en (Wb).

La formulación presentada en la referencia [1], cuenta con una estructura matricial no simétrica. Dicha formulación es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} S + \frac{N}{\Delta t} & -P \\ \frac{Q}{\Delta t} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{\Delta t} & 0 \\ \frac{Q}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t - \Delta t) \\ I(t - \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (42)$$

donde:

- $V(t)$ es el voltaje suministrado en la bobina.

R es la resistencia del circuito acoplado.

$I(t)$ representa la corriente que se genera en el circuito acoplado.

Y los elementos del sistema matricial en la ecuación (39) son los siguientes:

$$S_{ij} = \int_S \frac{v}{r} (\nabla \beta_i^T \cdot \nabla \beta_j) dr dz \quad (43)$$

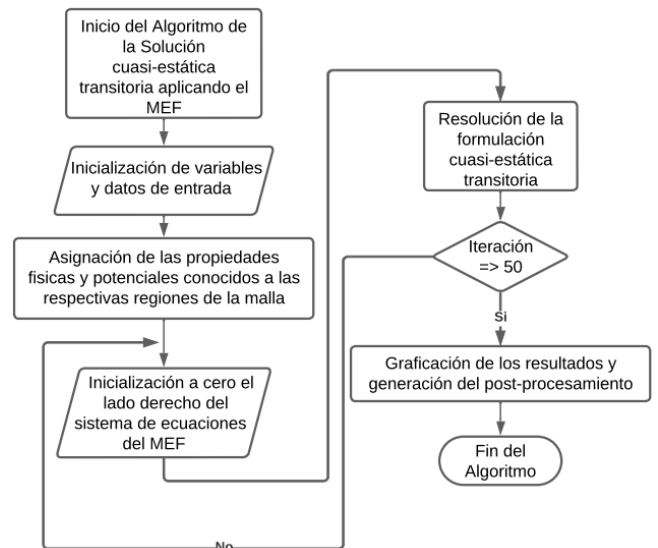
$$N_{ij} = \int_S \frac{\sigma}{r} \beta_i^T \beta_j dr dz \quad (44)$$

$$P_{ij} = \int_S \left(\frac{N_{cok}}{S_k} \right) \beta_i^T dr dz \quad (45)$$

$$Q_{ij} = \int_S 2\pi r \left(\frac{N_{cok}}{S_k} \right) \beta_i^T dr dz \quad (46)$$

El término r presentado en las ecuaciones anteriores, representa el radio centroide del elemento triangular de primer orden y los subíndices i, j representan los nodos locales del elemento.

Fig. 1. Diagrama de flujo de la solución cuasi-estática transitoria



Fuente: Elaboración propia.

La formulación electromagnética, antes presentada se ha implementado en el software comercial MATLAB [7] con la finalidad de reducir tanto el uso de memoria como el tiempo de resolución.

3. VALIDACIÓN DEL MODELO CUASI-ESTÁTICO

3.1 Parámetros geométricos y físicos del modelo de validación.

Como etapa de validación se resuelve un caso de estudio de un dispositivo electromagnético que incorpora un circuito acoplado. El modelo de validación a resolver en este artículo fue tomado de [1], donde la geometría del mismo puede ser consultada. Este modelo consiste en un núcleo ferromagnético, el cual encierra una bobina de 50 vueltas con

una resistencia de 2Ω , la cual es alimentada por una fuente de corriente directa de 10 V. La permeabilidad del núcleo es $\mu_r = 3000$ y su conductividad eléctrica es de $\sigma = 1 \times 10^6 S/m$.

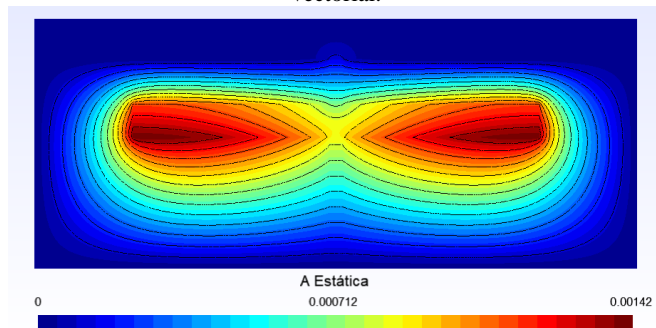
La malla utilizada en las simulaciones consta de 161301 nodos y 320972 elementos triangulares de primer orden. Esta malla fue realizada mediante el uso del software libre Gmsh [8].

3.1 Resultados obtenidos del modelo de validación

La simulación se realizó en una computadora MSI Thin (CPU: Intel 11th Gen i7-11800H @ 2.30 GHz, Memoria RAM: 16 GB).

En las Figuras 2 y 4 se muestra el potencial magnético vectorial de las soluciones obtenidas del modelo implementado. Particularmente, la Figura 2 muestra la solución estática del modelo y la Figura 4 muestra la solución cuasi-estática, donde se incluye el término con corrientes inducidas. Se puede observar que, en la solución con corrientes inducidas, la distribución del potencial magnético vectorial se concentra en la región con un alto valor de conductividad.

Fig. 2. Solución estática representada con el potencial magnético vectorial.



Fuente: Elaboración propia.

Se realizó una comparación entre los resultados obtenidos de la simulación del modelo de validación con una solución analítica que representa la corriente generada en el circuito externo. Se encontró que para la solución estática en comparación a la solución analítica se obtuvo un error del 4.8371% y la solución con corrientes inducidas se obtuvo un error del 4.2279%. Dicha solución fue obtenida de la referencia [1] y se muestra en la Figura 5.

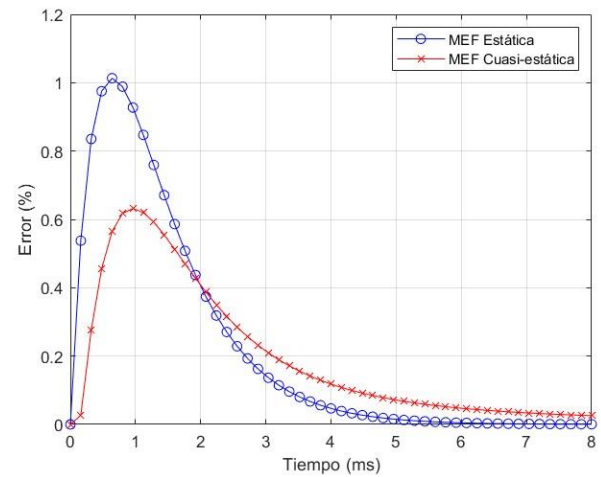
De manera matemática, la solución analítica se describe como:

$$I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (47)$$

donde:

L una inductancia del circuito acoplado ($0.987 \times 10^{-3} H$).

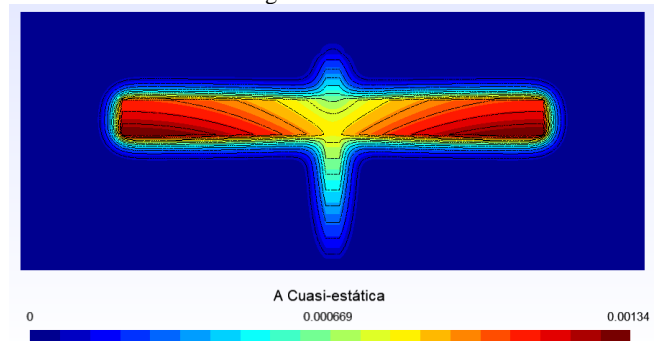
Fig. 3. Gráfica comparativa del error entre el MEF vs la solución analítica.



Fuente: Elaboración propia.

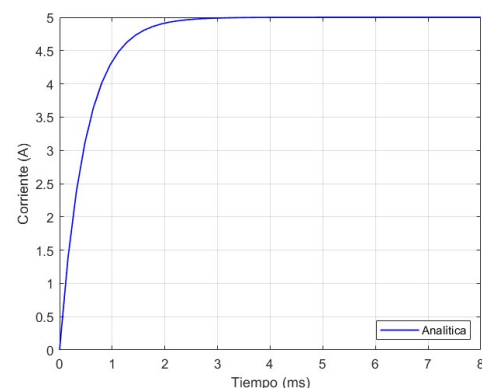
En las Figuras 6 y 7 se muestra la gráfica de las corrientes obtenidas de ambas soluciones en comparación a la solución analítica, antes presentada. La respuesta analítica es representada con una línea de color azul; la corriente de la solución estática está representada por una línea de color rojo con rombos y la solución con corrientes inducidas está descrita por una línea de color negro con cuadrados.

Fig. 4. Solución cuasi-estática representada con el potencial magnético vectorial.



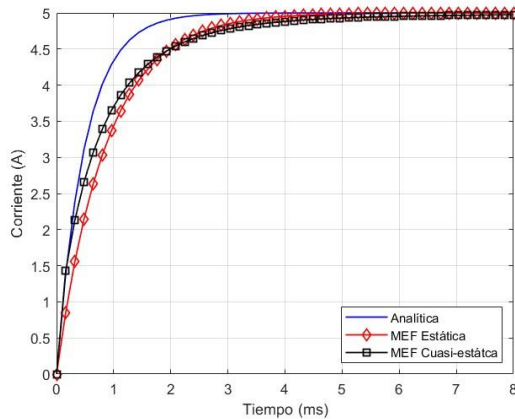
Fuente: Elaboración propia.

Fig. 5. Gráfica de la solución analítica de la corriente del circuito acoplado.



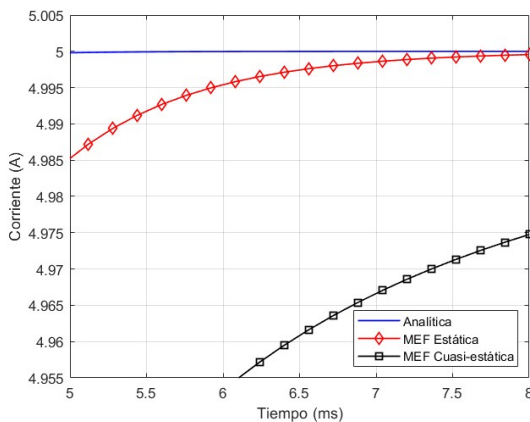
Fuente: Elaboración propia.

Fig. 6. Respuesta transitoria de la corriente.



Fuente: Elaboración propia.

Fig. 7. Respuesta transitoria de la corriente con acercamiento.



Fuente: Elaboración propia.

4. CONCLUSIONES

El estudio realizado en este trabajo demostró la validación de un modelo desarrollado en MATLAB para la simulación de problemas cuasi-estáticos axisimétricos con circuito acoplado, mediante el uso del MEF. Para demostrar la utilidad y validación de esta formulación se simuló un caso de estudio. La relevancia de este trabajo ofrece una base sólida para futuras investigaciones en el modelado de fenómenos acoplado magnéticos y térmicos. El código desarrollado establece una plataforma para el desarrollo de metodologías de elementos finitos más eficientes y versátiles.

4.1 Observaciones generales

Este trabajo fue realizado como parte del proyecto titulado “Desarrollo de un Modelo Magneto-Térmico de Elementos Finitos en 2D para Describir el Funcionamiento de Dispositivos Basados en Calentamiento por Inducción”, el cual se encuentra registrado en la Facultad de Ingeniería Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California. A su vez, el primer autor agradece al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo brindado en la beca de estudios de posgrado.

5. REFERENCIAS

- [1] J. P. A. Bastos and N. Sadowski, *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*, New York, NY: Marcel Dekker Inc., 2003.
- [2] M. V. K. Chari, G. Bedrosian, J. Roeth, and A. Konrad, “Unification of electromagnetic and thermal analyses to determine losses and temperature distribution in a slot-embedded conductor,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 2, no. 1, pp. 61–81, 1986.
- [3] J. Guzmán, F. de J. González-Montañez, R. Escarela-Pérez, J. C. Olivares-Galván, y V. M. Jiménez-Mondragon, “Numerical Modeling of the Thomson Ring in Stationary Levitation Using FEM-Electrical Network and Newton-Raphson,” *Ingeniería Investigación y Tecnología*, vol. XVI, no. 3, pp. 431-439, Julio-Septiembre 2015.
- [4] G. Meunier, D. Shen and J. -L. Coulomb, “Modelisation of 2D and axisymmetric magnetodynamic domain by the finite elements method,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, no. 1, pp. 166-169, Jan. 1988.
- [5] P. Lombard and G. Meunier, “A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymmetric and transient systems,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1737-1740, March 1993.
- [6] D. Marcsa and M. Kuczmann, “Closed loop voltage control of a solenoid using parallel finite element method,” *COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 35, no. 4, pp. 1439–1449, Jul. 2016.
- [7] MATLAB and Statistics Toolbox Release 2023a, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.
- [8] Geuzaine, C. y Remacle, J.-F. (2009). “Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79(11), pp. 1309-1331.