

Estabilización de sistemas lineales de control mediante los teoremas de Rouché y de conteo de ceros y polos

Manuel Ibarra-Noriega ^a, Nohe R. Cazarez-Castro ^b, Jorge A. López-Rentería ^c.

^a Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana, 22414, Tijuana, B.C., México.

^b manuel.ibarra@tectijuana.edu.mx, ^c nohe@ieee.org.

^b SECIHTI – Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana, 22414, Tijuana, B.C., México.

^c jorge.lopez@tectijuana.edu.mx.

Resumen

En el presente trabajo, se utiliza el teorema de Rouché y el teorema de conteo de ceros y polos para establecer condiciones necesarias para estabilizar una familia de polinomios. Esta técnica nos permite proporcionar un intervalo de estabilidad robusta de la familia antes mencionada. Luego, los resultados obtenidos se aplican para el diseño de controladores estabilizantes para sistemas lineales de control. Finalmente, se aplican los resultados a los sistemas masa-resorte-amortiguador y de Lorenz para evidenciar la efectividad del controlador diseñado.

Palabras clave— Teorema de conteo de ceros y polos, controladores lineales, Estabilidad robusta, Teorema de Rouché.

Abstract

In the present work, Rouché's and the counting zeros and poles theorems are used to establish necessary conditions for stabilizing a family of polynomials. This technique allows us to provide a robust stability interval for the aforementioned family. Then, the obtained results are applied to the design of stabilizing controllers for linear control systems. Finally, results are applied to mass-spring-damper and Lorenz systems to show the effectiveness of the designed controller.

Keywords— The Zeros and Poles Counting Theorem, Linear Controllers, Robust Stability, The Rouché's Theorem.

1. INTRODUCCIÓN

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (1)$$

donde $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el vector de estados, $F \in \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial lo suficientemente suave, y $u \in \mathbb{R}$. La teoría cualitativa para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales es una herramienta muy utilizada por muchos investigadores para entender y explicar la dinámica de diferentes fenómenos. Particularmente, la estabilidad y estabilidad estructural de puntos de equilibrio y orbitas periódicas son teorías directamente aplicables en la ingeniería, ya sea para sistemas mecánicos, dispositivos eléctricos, sistemas bionspirados, sistemas inteligentes y

automatización, por mencionar algunos [1,2]. La clase de sistemas derivados de (1), de tipo mecánicos, son de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, f y g son campos vectoriales suaves y u es una función de señal externa. Para el problema de estabilización, una de las técnicas efectivas es la linealización mediante retroalimentación (ver, por ejemplo [1,2]). Es decir, se considera el cambio un cambio de coordenadas suave $z = T(x)$ y se toma $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, donde $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{mxm}$, con el objetivo de obtener la equivalencia lineal

$$\dot{z} = Ax + Bv \quad (3)$$

del sistema (2), con la pareja (A, B) controlable, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Luego, se diseña $v = -Kx$, con $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que $A - BK$ tenga sus valores propios con parte real negativa. Otra técnica, aunque es de forma local, es también muy efectiva para la estabilización del sistema. A saber, en este método (Hartman-Grobman) se considera la parte lineal de la expansión en serie de Taylor del sistema (2) alrededor de sus puntos de equilibrio para estabilizar [1,3,4]. Esto es, para el análisis se considera, sin pérdida de generalidad, al origen $x = 0$ como punto de equilibrio. Así, la expansión en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ se puede expresar como

$$\dot{x} = Ax + Bu + H(x, u), \quad (4)$$

Con Jacobiana $A = Df(0)$, $B = g(0)$, y H son los términos de orden superior. Se diseña también un controlador lineal (proporcional) de la forma $u = -K^T x$, con $K \in \mathbb{R}^n$, para estabilizar el sistema. A saber, el sistema se dice ser estable (Hurwitz estable) si su polinomio característico tiene todas sus raíces contenidas en el semiplano complejo abierto izquierdo $\mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\lambda) < 0\}$; mientras que el sistema se considera inestable si al menos una raíz no pertenece a \mathbb{C}^- . Para el caso, es inestable si al menos una raíz pertenece a $\mathbb{C}^+ \cup i\mathbb{R}$, donde $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\lambda) > 0\}$ es el semiplano complejo abierto derecho e $i\mathbb{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\lambda) = 0\}$ es el eje imaginario. El conjunto de polinomios Hurwitz con coeficientes positivos es denotado por \mathcal{H}_n^+ . En este sentido, uno se puede enfocar específicamente en estudiar la estabilidad por medio del polinomio característico del sistema. En cualquiera de las dos metodologías descritas anteriormente, se determina la estabilidad por medio del polinomio característico de $A - BK^T$ [5,6].

El problema de obtener la estabilidad para el sistema (1), si $u = 0$, ha sido uno de los problemas más investigados en Ingeniería y Matemáticas Aplicadas; una manera de lograrlo es mediante un diseño adecuado de u . Para diseñar el controlador u , es conveniente transformar el sistema (3) a su forma canónica controlable, la cual depende de los coeficientes del polinomio característico de A . La teoría polinomial es una potente herramienta para determinar la estabilidad o inducir estabilización en sistemas de control de

la forma (2). En [7] y [8] se diseñan controladores de la forma $u = -kc^T x$ y se determinan los valores de alta ganancia de k . En [9] y [10] se estudian curvas conectoras para conectar sistemas con controladores estabilizantes lineales de la forma $u = -c^T(\mu)x$.

En [11] utilizan un método para construir secuencias de polinomios de Hurwitz robustamente estables utilizando la conexión entre polinomios estables y polinomios ortogonales. Además, en [12] presentan un estudio sobre la estabilidad de Hurwitz de familias de polinomios. Se demuestra que existe un polinomio cuya estabilidad determina la estabilidad de toda la familia. Este polinomio se obtiene minimizando determinantes y, en ciertos casos, coincide con un polinomio de Kharitonov, lo que revela una nueva propiedad de dichos polinomios. En [13], proponen un algoritmo para proporcionar condiciones suficientes sobre el parámetro incierto de tal manera que una familia de polinomios robustamente estable, tenga todos sus ceros dentro de una región utilizando el teorema de Rouché.

El resto del presente trabajo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2, se presentan los preliminares matemáticos de la variable compleja, como el teorema de conteo de ceros y polos, y el teorema de Rouché. En la sección 3, se presenta el problema a resolver y se ofrece una descripción del sistema. En la sección 4, se desarrolla una técnica para calcular un intervalo de estabilidad utilizando la teoría presentada en la sección 3. Finalmente, en la sección 5, se aplican los resultados obtenidos al sistema masa-resorte-amortiguado y al Oscilador de Duffing.

2. PRELIMINARES

Se utilizarán algunas propiedades elementales de las funciones analíticas para localizar las raíces de ecuaciones polinomiales dentro de curvas cerradas simples. El siguiente teorema establece las condiciones necesarias para asegurar un número finito de raíces de una función dentro de una región S , delimitada por una curva cerrada γ definida en \mathbb{C}^- [14].

Teorema 1. (Conteo de ceros y polos)

Sea φ analítica en una región A excepto en un número finito de polos b_1, b_2, \dots, b_m y ceros a_1, a_2, \dots, a_n , contando sus multiplicidades. Sea γ una curva cerrada homotópica a un punto a en A , y que no pase a través de ninguno de los puntos a_j o b_i . Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^n I(\gamma, a_j) - \sum_{i=1}^m I(\gamma, b_i) \right] \quad (5)$$

En el siguiente teorema se considera dos funciones analíticas φ y ψ en las cuales ψ es una perturbación de φ , en el cual se asegura que ambas funciones tengan la misma cantidad de ceros y polos dentro de una región $S \subset \mathbb{C}$.

Teorema 3. (Rouché)

Sean φ y ψ analíticas en una región S , excepto para un número finito de ceros y polos en S . Sea γ una curva cerrada en S , homotópica a un punto en $\text{int}(\gamma)$, y que no pase por ningún cero o ningún polo de φ o de ψ . Suponga que sobre γ se tiene

$$|\varphi - \psi| < |\varphi|. \quad (6)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \Delta_{\gamma} \arg(\varphi) = \Delta_{\gamma} \arg(\psi) \\ \text{ii)} \quad & z_{\varphi} - p_{\varphi} = z_{\psi} - p_{\psi} \end{aligned}$$

donde $z_{\varphi} = \sum_{j=1}^n I(\gamma, z_j)$, con z_j los ceros de φ en S , y $z_{\psi}, p_{\varphi}, p_{\psi}$ se definen similarmente.

Para el caso de polinomios, las cuales son funciones enteras, se tiene que $p_{\varphi} = p_{\psi} = 0$. Si además, la curva γ es cerrada simple, entonces $I(\gamma, z_j) = 1$ e $I(\gamma, \zeta_j) = 1$.

3. ESTABLECIMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (7)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}$ es la ley de control escalar. El objetivo es diseñar un controlador proporcional de la forma $u = -kc^T x$, con $k \in \mathbb{R}$ y $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, tal que el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b(-kc^T x) \\ &= (A - kbc^T)x, \end{aligned} \quad (8)$$

cuyo polinomio característico es la familia monoparamétrica

$$\begin{aligned} P(\lambda, k) &= \det[A - kbc^T - \lambda I] \\ &= p(\lambda) + kq(\lambda), \end{aligned} \quad (9)$$

con matriz identidad I . Por tanto, diseñar el controlador $u = -kc^T x$ para estabilizar el sistema (7), es equivalente a diseñar $kq(\lambda)$ en (9) para que el rayo $P(\lambda, k)$ tenga todas sus raíces en \mathbb{C}^- .

Con el objetivo de obtener la estabilidad de $P(\lambda, k)$, se aplicará el teorema de Rouché tomando las funciones $\varphi = p$ y $\psi = p + kq$. Dado que φ y ψ son polinomios, se tiene $p_{\varphi} = p_{\psi} = 0$, por lo tanto, se deben encontrar todos los valores de k tales que

$$z_{p(\lambda)} = z_{P(\lambda, k)} \quad (10)$$

Así, el análisis de estabilidad estará enfocado polinomialmente.

4. INTEGRACIÓN SOBRE REGIÓN SEMICIRCULAR

En esta sección se obtiene un intervalo de estabilidad para el rayo de polinomios (9). Para lograrlo, consideremos $q(\lambda) = p'(\lambda)$ con el objetivo de aplicar el teorema de conteo de ceros y polos.

Así, $\varphi = p$ y $\psi = p + kp'$, por lo cual, la condición de dominancia (6) está dada por

$$|kp'| = |\varphi - \psi| < |\varphi| = |p| \quad (11)$$

El objetivo principal es determinar los valores de k para los cuales se satisface (11). En consecuencia, se obtendrá la misma cantidad de ceros de $p(\lambda)$ y $P(\lambda, k) = p(\lambda) + kp'(\lambda)$, garantizando la estabilidad del sistema en lazo cerrado (8).

Se determinará un intervalo de estabilidad utilizando región semicircular construida con el radio espectral del polinomio $p(\lambda)$ y aplicando los teoremas mencionados en los preliminares. Para ello, la ecuación (11) se reescribe como

$$\frac{|kp'|}{|p|} < 1, \quad (12)$$

al integrar ambas partes de la ecuación (12), sobre la curva cerrada simple γ , se obtiene

$$\int_{\gamma} \frac{|kp'|}{|p|} d\lambda < \int_{\gamma} d\lambda. \quad (13)$$

Por la desigualdad del triángulo, la parte izquierda de (13) se acota como

$$|k| \left| \int_{\gamma} \frac{p'}{p} d\lambda \right| < |k| \int_{\gamma} \frac{|p'|}{|p|} d\lambda. \quad (14)$$

Ahora, por el teorema de conteo de ceros y polos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= 2\pi i \left[\sum_{j=1}^n I(\gamma, a_j) - \sum_{i=1}^m I(\gamma, b_i) \right] \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n I(\gamma, a_j) \end{aligned} \quad (15)$$

debido a que la función $p(\lambda)$ es un polinomio, no tiene polos, solamente ceros. Además, si γ es curva cerrada simple, entonces

$$\int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2n\pi i \quad (16)$$

por tanto,

$$\left| \int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz \right| = 2n\pi \quad (17)$$

La parte derecha de (13) corresponde al cálculo del área delimitada por la curva γ , por lo cual

$$\int_{\gamma} d\lambda = \text{Área}(\gamma). \quad (19)$$

Para $0 \leq t \leq 1$ y el vector $v = (0, \rho + \varepsilon)$, se considera la curva cerrada simple parametrizada por

$$\gamma_{\rho}(t) = \begin{cases} 4tv - v, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (20)$$

donde $\theta(t) = 2\pi(t - 1) + 3\pi/2$, la cual está orientada positivamente (ver figura 1), donde $\varepsilon \gg 0$ lo suficientemente pequeño y ρ es el radio espectral definido como

$$\rho = \{|\lambda_i| : \det(A - \lambda I) = 0\} \quad (21)$$

Luego, la integral (19), que representa el área delimitada por la curva γ_{ρ} , está dada por

$$\int_{\gamma_{\rho}} d\lambda = \frac{\pi(\rho + \varepsilon)^2}{2}. \quad (22)$$

Con el desarrollo anterior, se puede establecer el siguiente resultado para la estabilidad del sistema (7).

Teorema 4. Considere el sistema lineal de control

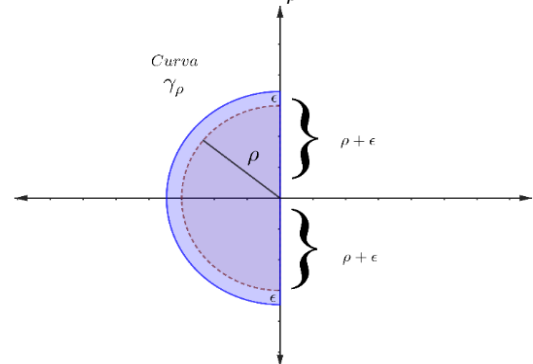
$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (23)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, y $u \in \mathbb{R}$ la señal externa. Sea $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in \mathcal{H}_n^+$ y definase $c^T \in \mathbb{R}^n$ como el vector de coeficientes de $p'(\lambda)$. Entonces el sistema (23) en lazo cerrado con el controlador $u = -kc^T x$ es asintóticamente estable si

$$|k| < \frac{\rho^2}{4n} \quad (24)$$

donde ρ es el radio espectral de A .

Figura (1): Curva cerrada simple γ_{ρ} , orientada positivamente.



Fuente: Elaboración propia.

5. APLICACIONES

5.1 Sistema de masa-resorte-amortiguador.

Se considera una masa mmm sujeta por un extremo a un resorte y por el otro a un amortiguador. El resorte se estira una cierta distancia x y luego se suelta. El modelo para

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + cy = u \quad (25)$$

donde β es la constante de amortiguamiento, c es la constante del resorte, y $u \in \mathbb{R}$ la señal externa. Si se hace $u=0$, y se divide (24) por m , obtenemos

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0, \quad (25)$$

$$\text{con } a = \frac{\beta}{m} \text{ y } b = \frac{c}{m}.$$

Para estabilizar (24), primero se expresará (25) en el espacio de estados. Esto se logra definiendo el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

se derivan las componentes del vector de estados en (26), y se obtiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (27)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$. Si $u = 0$ y dado de $b \neq 0$, entonces (27) tiene un único punto de equilibrio $x = (0,0)^T$. Ahora, para la estabilización robusta del sistema (24), se diseñará un controlador proporcional de la forma $u = -kc^T x$, donde $k \in \mathbb{R}$, c^T es vector con los coeficientes de la derivada de $p(\lambda)$ y x es el vector de estados, entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - kbc^T)x \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (c_1, c_2)^T \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b - kc_1 & -a - kc_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

La familia de polinomios Hurwitz definida en (9), asociado al sistema (28) está dado por

$$\begin{aligned} P(\lambda, k) &= \det \left[\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b + kc_1 & a + kc_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \lambda^2 + a\lambda + b + k(2\lambda + a) \\ &= p(\lambda) + kp'(\lambda), \end{aligned} \quad (29)$$

donde $c_2 = 2$ y $c_1 = a$. Por el Teorema 4, se tiene que

$$|k| < \frac{\rho^2}{4n} = \frac{\rho^2}{8} \quad (30)$$

es un intervalo de estabilidad robusta para el sistema (24). En particular, para el sistema en su representación en el espacio de estados dado en (27), se toman $a = 6$ y $b = 25$. Así, el

polinomio característico $p(\lambda)$ asociado, así como su derivada $p'(\lambda)$, quedan expresados como

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + 6\lambda + 25 \\ p'(\lambda) &= 2\lambda + 6, \end{aligned} \quad (31)$$

con $c^T = (2, 6)$. Además las raíces del polinomio $p(\lambda)$ son $\lambda_1 = -3 + 4i$, y $\lambda_2 = -3 - 4i$, donde el radio espectral es $\rho = 5$. Por tanto, el intervalo de estabilidad está dado por

$$|k| < \frac{25}{8} = 3.125 \quad (32)$$

Como comprobación de lo anterior, se sustituye el valor de k en la familia de polinomios (29) y se demuestra que es Hurwitz estable. A saber,

$$\begin{aligned} P(\lambda, 3.125) &= \lambda^2 + 6\lambda + 25 + (3.125)(2\lambda + 6) \\ &= \lambda^2 + 12.25\lambda + 43.75. \end{aligned} \quad (34)$$

Dado que todos los coeficientes son positivos en (34), entonces (29) es una familia de polinomios es Hurwitz estable.

5.2 Sistema de Lorenz.

El sistema de Lorenz, con una señal externa incluida, dado por la siguiente expresión

$$\dot{x} = A(\mu)x + h(x, \mu) + U, \quad (35)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\ h(x, \mu) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\mu = \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \\ \beta \end{pmatrix}$ es el vector de parámetros y U la señal

externa, con $u \in \mathbb{R}$. No es difícil ver que, al apagar el controlador, es decir, al establecer $U = 0$, el punto $x^* = 0$ es punto de equilibrio del sistema (35), y con matriz jacobiana $A(\mu) = Df(0)$. Luego, el polinomio característico $p(\lambda)$ asociado al sistema (35) está dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \left[\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \right] \\ &= \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \end{aligned} \quad (36)$$

donde $a_1 = \sigma + \beta + 1$, $a_2 = \sigma(1 - \gamma) + \beta(\sigma + 1)$, y $a_3 = \sigma\beta(1 - \gamma)$.

Por otro lado, existe una matriz de cambio de base P talque $PA = A_jP$ donde A_j está dada en forma de Jerk:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Además, la matriz P define el cambio de coordenadas suave $y = Px$, el cual transforma al sistema (35) en

$$\dot{y} = A_J y + bu + \tilde{h}(y, \mu) \quad (38)$$

donde $b^T = (0 \ 0 \ 1)$ y $\tilde{h}(y, \mu) = Ph(P^{-1}y, \mu)$. Dado que el objetivo principal es la estabilización, se considera únicamente la parte lineal de (38), y se diseñará un controlador proporcional de la forma $u = -kc^T y$, con $c^T = (c_1 \ c_2 \ c_3)$, $k \in \mathbb{R}$. El sistema (38) en lazo cerrado se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (A_J - kbc^T)y + \tilde{h}(y, \mu) \\ &= A(\mu, k) + \tilde{h}(y, \mu), \end{aligned} \quad (39)$$

cuyo polinomio característico está dado por la familia

$$\begin{aligned} P(\lambda, k) &= \det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{3k} & -a_{2k} & -a_{1k} \end{pmatrix} \right] \\ &= p(\lambda) + kp'(\lambda), \end{aligned} \quad (40)$$

donde $a_{1k} = a_1 + kc_3$, $a_{2k} = a_2 + kc_2$ y $a_{3k} = a_3 + kc_1$.

Finalmente, por el teorema 4, la cota para k de la familia de polinomios $P(\lambda, k)$ esta dada por

$$|k| < \frac{\rho^2}{4n} = \frac{\rho^2}{12} \quad (41)$$

es un intervalo de estabilidad robusta para el sistema (38). Se puede observar que $p(\lambda)$ se puede factorizar como

$$p(\lambda) = (\lambda + \beta)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \gamma)). \quad (42)$$

Para asegurar que $p(\lambda) \in \mathcal{H}_3^+$, se deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \beta &> 0, \\ \sigma + 1 &> 0, \\ \sigma(1 - \gamma) &> 0, \end{aligned} \quad (43)$$

de la cual, la última desigualdad arroja dos casos:

$$\begin{aligned} &(\gamma < 1) \wedge (\sigma > 0), \\ \text{ó,} & \\ &(\gamma > 1) \wedge (\sigma < 0). \end{aligned} \quad (44)$$

Por tanto, $p(\lambda)$ es Hurwitz si, y solo si,

$$\begin{aligned} &\beta > 0, \gamma < 1 \text{ y } \sigma > 0 \\ \text{ó} & \\ &\beta > 0, \gamma > 1 \text{ y } \sigma < 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Para la verificación numérica, se toma $\beta = 1, \sigma = 1$ y $\gamma = -1$. Así, el espectro de $p(\lambda)$ con estos valores está dado por

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -1 \pm i, \quad (46)$$

luego, $p(\lambda)$ es Hurwitz.

Por lo tanto, de (39) concluimos que el sistema (37) es asintóticamente estable si

$$|k| < \frac{\rho^2}{12} = \frac{1}{6}. \quad (47)$$

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

En este trabajo, se ha utilizado el teorema de Rouché, y el conteo de ceros y polos para determinar un intervalo de estabilidad robusta para una familia de polinomios Hurwitz, el cual se caracteriza por la sencillez algebraica del cálculo. La facilidad de implementación en sistemas de control lineales, e incluso en sistemas no-lineales, respecto a la determinación de estabilidad robusta, como se puede verificar en los ejemplos 5.1 (modelo de masa-resorte-amortiguador) y 5.2 (Sistema de Lorenz). Como paso futuro, se investigará matemáticamente las condiciones bajo las cuales el sistema en lazo cerrado mantiene estabilidad robusta para valores grandes de la ganancia k .

7. REFERENCIAS

- [1] D. W. Jordan and P. Smith. "Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction to Dynamical Systems". Oxford University Press, USA, 1999.
- [2] H.K. Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice Hall, 2002.
- [3] L. Perko. "Differential Equations and Systems Dynamics". Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 1996.
- [4] Y.A. Kuznetsov, "Elements of applied bifurcation Theory". Springer, 1998.
- [5] B.R. Barmish, "New tools for robustness linear systems", Macmillan, New York, NY, 1994.
- [6] S. Bialas, "A necessary and suficiente condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices", Bull. Polish Acad. Sci. Tech., 33, pp 473-480, 1985.
- [7] B. Aguirre, J. Solis-Daun, and R. Suarez, "Stabilization of linear systems: a polynomial approach" In advanced dynamics, instrumentation and control: Volume II, pp 21-28. World scientific, 2007.
- [8] J.A. López-Rentería, B. Aguirre-Hernández and F. Verduzco. "The boundary crossing theorem and the maximal stability interval". Mathematical Problems in Engineering, 2011. <https://doi.org/10.1155/2011/123403>
- [9] J.A. López-Rentería, B. Aguirre-Hernández, F. Verduzco González, "On Hurwitz and Schur connecting-curves and dense trajectories", Advances in Mathematical and Computational Methods: Addressing Modern Challenges of Science, Technology, and Society 1368, pp 271-274, 2011. doi:10.1063/1.3663511.

- [10] J.A. López-Rentería, B. Aguirre-Hernández and F. Verduzco, “Stable polynomial curves and some properties with application in control”. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 23(2), pp 869-889, 2017.
- [11] A. Arceo, H. Flores, L. Garza, L.E. Garza and G. Romero “On robust stability for Hurwitz polynomials via recurrence relations and linear combinations of orthogonal polynomials”. *Complexity*, pp 9404316, 2022.
- [12] G. Oaxaca, R. Villafuente and B. Aguirre, “On Hurwitz stability for families of polynomials”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Volume 34, Issue 7, 10 May, Pages 4576-4594, 2024.
- [13] N. Martinez and L. Garza, “An application of Rouché’s theorem to delimit the zeros of a certain class of robustly stable polynomials”. *Mathematics*, Volumen 11, pp 4244, 2023.
- [14] J. Marsden and M.J. Hoffman, “Basic Complex Analysis”. 2nd. Ed. Freeman Co. New York, 1987.